Matemáticas discretas 2024–1
Ejemplo 4b: Redacción de demostraciones

En este documento se presentan ejemplos de redacción para las demostraciones discutidas en clases. Los métodos de demostración utilizados son: prueba directa de implicación, prueba por contraposición, prueba con cadenas de “sii”, prueba por casos y prueba por contradicción.

Teorema 1. *Si* $0 \leq x \leq 2$, *entonces* $-x^3 + 4x + 1 > 0$.

Prueba. Supongamos que $0 \leq x \leq 2$. Entonces x, $2 - x$ y $2 + x$ no son negativas. Por lo tanto, el producto de estos términos tampoco es negativo. Sumar 1 a este producto resulta en un número positivo, entonces

$$x(2 - x)(2 + x) + 1 > 0.$$

Multiplicando el lado izquierdo de la desigualdad se demuestra que

$$-x^3 + 4x + 1 > 0.$$

□

Teorema 2. *Si* r *es irracional, entonces* $\sqrt{r}$ *también es irracional.*

Prueba. Demostramos la contrapositiva: si $\sqrt{r}$ es racional, entonces r es racional. Supongamos que $\sqrt{r}$ es racional. Entonces existen enteros a y $b \neq 0$ tales que

$$\sqrt{r} = \frac{a}{b}.$$

Elevando al cuadrado en ambos lados de la igualdad resulta en que

$$r = \frac{a^2}{b^2}.$$

Ya que a^2 y b^2 son enteros, r es racional. □

Teorema 3. *La desviación estándar de una secuencia de valores es cero, si y solo si, todos los valores son iguales a la media.*

Prueba. Construimos una cadena de implicaciones “sii”, comenzando con la afirmación que la desviación estándar es cero. Sean $x_1, \ldots, x_n$ la secuencia de valores y μ su media, por definición de desviación estándar tenemos que,

$$\sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \cdots + (x_n - \mu)^2}{n}} = 0.$$

Ya que cero es el único número cuya raíz cuadrada es cero, la anterior igualdad se cumple sii

$$(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 = 0.$$

Los cuadrados de números reales nunca son negativos, entonces cada término del lado izquierdo de la ecuación anterior no es negativo. Esto significa que la ecuación se cumple sii cada término $(x_i - \mu)^2$ es cero. Cada uno de estos términos es cero sii $x_i = \mu$, por lo tanto esto se cumple sii cada x_i es igual a la media. □

Teorema 4. *Cada colección de seis personas incluye una clica de tres personas o un grupo de tres desconocidos.*

Prueba. La demostración es por análisis de casos. Sea x una de las seis personas, todos los escenarios se contemplan con dos casos:

1. Entre las otras cinco personas además de x hay al menos tres que conocen a x.
2. Entre las otras cinco personas además de x hay al menos tres que no conocen a x.

Caso 1: Suponemos que al menos tres personas conocen a x y consideramos dos subcasos:

Caso 1.1: Ninguna pareja de esas tres personas se conoce. Entonces estas tres personas conforman un grupo de tres desconocidos.

Caso 1.2: Alguna pareja de esas tres personas se conoce. Entonces esa pareja, junto con x, conforman una clica de tres personas.

Esto implica que el teorema se cumple en el caso 1.

Caso 2: Suponemos que al menos tres personas no conocen a x y también consideramos dos subcasos:

Caso 2.1: Todas las parejas de estas tres personas se conoce. Entonces estas tres personas conforman una clica de tres.

Caso 2.2: Alguna pareja de esas tres personas no se conoce. Entonces esa pareja, junto con x, conforman un grupo de tres desconocidos.

Esto implica que el teorema se cumple en el caso 2.

Ya que el teorema se cumple en los dos casos y estos contemplan todos los posibles escenarios, el teorema se cumple en general. □

El siguiente lema es utilizado en el teorema 6.

Lema 5. *Si n^2 es par, entonces n es par.*

Prueba. Demostramos la contrapositiva: si n es impar, entonces n^2 es impar. Supongamos que n es impar. Por lo tanto existe un entero k tal que $n = 2k + 1$. Elevando ambos lados de la igualdad al cuadrado tenemos que

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Ya que $2k^2 + 2k$ es un entero, n^2 es impar. □

Teorema 6. *$\sqrt{2}$ es irracional.*

Prueba. Usamos demostración por contradicción. Supongamos que la afirmación es falsa y $\sqrt{2}$ es racional. Entonces existen enteros a y $b \neq 0$ tales que $\sqrt{2} = a/b$. Suponemos sin pérdida de generalidad que esta es una fracción irreducible. Elevando ambos lados de la igualdad al cuadrado resulta en que

$$2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación por b^2 tenemos que

$$2b^2 = a^2.$$

Por el lema 5 tenemos que a es par. Por lo tanto a^2 es múltiplo de 4 y d^2 es un múltiplo de 2. Por el lema 5 tenemos que d también es múltiplo de 2. Con esto hemos concluido que tanto a como b tienen a 2 como factor primo en común, lo que contradice el supuesto que a/b es una fracción irreducible. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ debe ser irracional. □